ЛЕКЦИЯ «Комплексные числа»

(внимательно прочитайте лекцию и разберите ВСЕ ***примеры-образцы*** *)*

В школьном курсе математики понятие числа постепенно расширяется. Сначала речь идет только о натуральных числах, затем последовательно появляются целые, рациональные и, наконец, действительные числа. В этой лекции понятие числа будет еще раз расширено: будут введены так называемые комплексные числа, включающие в себя действительные числа как весьма частный случай. В лекции рассматриваются операции над комплексными числами в алгебраической форме. Более глубокое изучение комплексных чисел выходит за рамки нашего курса.

Понятие комплексного числа

Комплексное число имеет вид $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая *мнимая единица*. Число a называется *действительной частью* комплексного числа z, число b называется *мнимой частью* комплексного числа z.

$a + bi$ – это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами: $z = bi + a$ или переставить мнимую единицу: $z = a + ib$ – от этого комплексное число не изменится. **Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке**: $z = a + bi$

$z = a + bi$ – это и есть алгебраическая форма комплексного числа

Существуют еще тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел

Действия с комплексными числами не представляют особых сложностей и мало чем отличаются от обычной алгебры.

Степень мнимой единицы

i - мнимая единица , $i^2 = -1$

$i^n = 1$, если при делении n на 4 в остатке получаем 0;

$i^n = i$, если при делении n на 4 в остатке получаем 1 ;

$i^n = -1$, если при делении n на 4 в остатке получаем 2 ;

$i^n = -i$, если при делении n на 4 в остатке получаем 3.

Примеры:

Вычислить а) i^{20} б) i^{17} в) i^{34} г) i^{43}

Решение: *для вычисления степени мнимой единицы i ,необходимо показатель разделить на 4 и по полученному остатку выбрать один из четырех вариантов ответа* а) $i^{20} = 1$, так как 20:4 = 5 (остаток 0)

б) $i^{17} = i$, так как 17: 4 = 4 (остаток 1)

в) $i^{34} = -1$, так как 34: 4 = 8 (остаток 2)

г) $i^{43} = -i$, так как 43 : 4 = 10 (остаток 3)

Сложение комплексных чисел

Пример

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:
$z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$

Действие настолько очевидно, что не нуждается в дополнительных комментариях.

Таким нехитрым способом можно найти сумму любого количества слагаемых: просуммировать действительные части и просуммировать мнимые части.

Для комплексных чисел справедливо правило первого класса: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ от перестановки слагаемых сумма не меняется.

Вычитание комплексных чисел

Пример

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$,если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$$

У полученного числа две части. Просто действительная часть – составная: $-2 - \sqrt{3}$.

Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.

Умножение комплексных чисел

***i^2* = -1** (это определение мнимой единицы очень важно, при выполнении умножения и деления комплексных чисел)

Пример

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$

Очевидно, что произведение следует записать так:
$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i)$

Раскрываем скобки по правилу умножения многочленов. Все алгебраические действия вам знакомы, главное, помнить, что $i^2 = -1$ **и быть внимательным**.

Повторим школьное правило умножения многочленов: чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена.

Подробно:

$$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$$

Обратите внимание $-i \cdot 6i = -6i^2 = -6 \cdot (-1) = +6$

(чаще всего ошибку допускают в знаках)

Как и сумма, произведение комплексных чисел перестановочно, то есть справедливо равенство: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Есть специальная формула для вычисления произведения комплексных чисел, но мне кажется, что подход с умножением многочленов универсальнее и понятнее.

Еще один **пример:**

$$(2+3\boldsymbol{i})(-5+6\boldsymbol{i}) = -10 - 15\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{i} + 18\boldsymbol{i}^2 = -28 - 3\boldsymbol{i}.$$

Деление комплексных чисел

Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными.**

Алгоритм:

1. Домножить числитель и знаменатель на выражение **сопряженное знаменателю**
2. В числителе раскрыть скобки и привести подобные (помним, что $i^2 = -1$)
3. В знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(помним, что $i^2 = -1$)

4. Записать результат в виде a + bi

Пример :

Выполнить деление: $\dfrac{2+3i}{5-7i}$

Решение.

$$\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)} = \frac{10+14i+15i+21\,i^2}{5^2-(7i)^2} = \frac{10+29i-21}{25+49} = \frac{-11+29i}{74} =$$

$$= \frac{-11}{74} + \frac{29i}{74}$$

(здесь учтено, что $i^2 = -1$).