**27 января. Добрый день, уважаемые студенты! Выполняем задания и присылаем мне. Выполняют не все, кто делает. Я все проверяю.**

**Файл с заданием отправьте преподавателю на почту mariaeva.vera@yandex.ru**

 **«Обратная функции»**

**Урок 1. Лекция по теме «Обратная функция»**

***План урока-лекции***

1. Организационный момент.
2. Актуализация знаний учащихся, необходимая для восприятия новой темы.
3. Постановка цели перед учащимися.
4. Изложение нового материала.
5. Подведение итогов урока.
6. Постановка домашнего задания.

***Ход урока-лекции***

2. Актуализация знаний. (Фронтальный опрос по теме предыдущего урока.)

Для учащихся на интерактивной доске демонстрируется график функции (рис. 1). Учителем формулируется задание – рассмотреть график функции и перечислить изученные свойства функции. Учащиеся перечисляют свойства функции в соответствии со схемой исследования. Учитель справа от графика функции маркером на интерактивной доске записывает названные свойства.



 Рис. 1

Свойства функции:

1. *D(f) = [-4;), E(y) = [0;).*
2. Ни четная, ни нечетная, непериодическая, непрерывная, ограничена снизу.
3. y=0 при х=0.
4. y>0 при на [-4;0) и на (0;).
5. Возрастает на (-2;-1) и на (0;);
убывает на (-4;-2) и на (-1;0).
6. yнаиб- не существует;
yнаим=0 при х=0.
7. xmax= -1 ,ymax = 2;
xmin = -2, ymin = 1;
xmin = 0, ymin= 0.
8. Выпукла вниз на (4;-1), выпукла вверх на (1;), невыпуклая на [-1;1].

3. Постановка цели перед учащимися.

По окончании исследования учитель сообщает, что сегодня на уроке они познакомятся еще с одним свойством функции – обратимостью. Для осмысленного изучения нового материала учитель предлагает ребятам познакомиться с основными вопросами, на которые учащиеся должны дать ответ по окончании урока. Вопросы в виде раздаточного материала есть у каждого ученика (раздается до урока).

Вопросы:

1. Какая функция называется обратимой?

2. Какая функция называется обратной?

3. Как связаны между собой области определения и множества значений прямой и обратной функций?

4. Сформулируйте достаточное условие обратимости функции.

5. Функция обратная возрастающей является убывающей или возрастающей?

6. Функция обратная нечетной является четной или нечетной?

7. Как расположены графики взаимно обратных функций?

4. Изложение нового материала.

*1) Понятие обратимой функции. Достаточное условие обратимости.*

На интерактивной доске учитель проводит сравнение графиков двух функций, у которых области определения и множества значений одинаковы, но одна из функций монотонна, а другая нет (рис.2). Таким образом, функция$ y=f\left(x\right)$ обладает свойством, не характерным для функции $y=g\left(x\right)$: какое бы число $y\_{0}$ из множества значения функции *f(x)* ни взять, оно является значением функции только в одной точке $x\_{0}$, тем самым учитель подводит учащихся к понятию обратимой функции.



 Рис. 2

Затем учитель формулирует определение обратимой функции и проводит доказательство теоремы об обратимой функции, используя график монотонной функции на интерактивной доске.

**Определение 1.** Функцию $y=f\left(x\right), x\in X$ называют **обратимой**, если любое свое значение она принимает только в одной точке множества *X*.

**Теорема.** Если функция $y=f\left(x\right)$ монотонна на множестве *X*, то она обратима.

Доказательство:

1. Пусть функция *y=f(x)* возрастает на множестве *Х* и пусть *х1≠х2*  – две точки множества *Х*.
2. Для определенности пусть *х1*< *х2*. Тогда из того, что *х1*< *х2*  в силу возрастания функции следует, что *f(х1)* < *f(х2)*.
3. Таким образом, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т.е. функция обратима.
4. Аналогично доказывается теорема в случае убывающей функции.

(По ходу доказательства теоремы учитель маркером делает все необходимые пояснения на чертеже)

Перед тем как сформулировать определение обратной функции учитель просит учащихся определить, какая из предложенных функций обратима? На интерактивной доске показаны графики функций (рис. 3, 4) и записаны несколько аналитически заданных функций:

 *а*)   *б*) 

 Рис. 3 Рис. 4

 *в*) *y = 2x + 5;  г*) *y = -*$х^{2}$*+ 7.*

**Замечание.** Монотонность функции, является **достаточным** условием существования обратной функции. Но оно **не является** необходимым условием.

Учитель приводит примеры различных ситуаций, когда функция не монотонна, но обратима, когда функция не монотонна и не обратима, когда монотонна и обратима.

*2) Понятие обратной функции. Алгоритм составления обратной функции.*

**Определение 2.** Пусть обратимая функция *y=f(x)* определена на множестве *Х*и область ее значений *Е(f)=Y*. Поставим в соответствие каждому *y* из *Y* то единственное значение *х*, при котором *f(x)=y.*Тогда получим функцию, которая определена на *Y*, а *Х* – область значений функции. Эту функцию обозначают *x=f -1(y),* $y\in Y$ и называют **обратной** по отношению к функции *y=f(x),*$ x\in X$.

Затем учитель знакомит учащихся со способом нахождения обратной функции, заданной аналитически.

**Алгоритм составления обратной функции для функции *y=f(x),*** $x\in X$***.***

1. Убедиться, что функция  *y=f(x)* обратима на промежутке *Х*.
2. Выразить переменную *х* через *у* из уравнения *y=f(x),* учитывая при этом, что $ x\in X$.
3. В полученном равенстве поменять местами *х* и *у*. Вместо *х=f -1(y)* пишут *y=f -1(x).*

На конкретных примерах учитель показывает как использовать данный алгоритм.

**Пример 1.** Показать, что для функции *y=2x-5* существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

*Решение*. Линейная функция *y=2x-5* определена на *R*, возрастает на *R* и область ее значений есть *R.* Значит, обратная функция существует на *R*. Чтобы найти ее аналитическое выражение, решим уравнение *y=2x-5* относительно *х*; получим $x=\frac{y+5}{2}$.  Переобозначим переменные, получим искомую обратную функцию  $y=\frac{x+5}{2}$. Она определена и возрастает на R.

**Пример 2.** Показать, что для функции *y=x2, х ≤ 0* существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

*Решение*. Функция непрерывна, монотонна в своей области определения, следовательно, она обратима. Проанализировав области определения и множества значений функции, делается соответствующий вывод об аналитическом выражении для обратной функции, которая имеет вид $y=-\sqrt{x}$.

*3) Свойства взаимно обратных функций.*

 **Свойство 1.** Если *g* – функция обратная к  *f*, то и *f* – функция обратная к *g* (функции взаимно обратные), при этом *D(g)=E(f), E(g)=D(f)*.

**Свойство 2.** Если функция $ y=f\left(x\right)$ возрастает (убывает) на множестве Х, а У – область значений функции, то обратная функция $ x=f^{-1}\left(y\right)$ возрастает (убывает) на У.

**Свойство 3.** Чтобы получить график функции $ y=f^{-1}\left(x\right)$, обратной по отношению к функции $ y=f\left(x\right)$, надо график функции$ y=f\left(x\right) $преобразовать симметрично относительно прямой *у=х*.

**Свойство 4.** Если нечетная функция обратима, то обратная ей тоже нечетная.

**Свойство 5.** Если функции *f(x)* и$g(x)$взаимно обратные, то для любого $x\in D(f)$ справедливо $g\left(f\left(x\right)\right)=x$, а для любого $ x\in D(g)$ справедливо $f\left(g\left(x\right)\right)=x$.

**Пример 3.** Построить график функции обратной $y=x^{2}$, если это возможно.

*Решение.*  На всей своей области определения данная функция не имеет обратной, поскольку она не монотонна. Поэтому рассмотрим промежуток, на котором функция монотонна: $\left\{\begin{array}{c}y=x^{2}\\x\geq 0\end{array}\right.$ , значит, существует обратная. Найдем *ее*. Для этого выразим  *x* через *y* : $x=\sqrt{y}$ . Переобозначим $y=\sqrt{x}$  - обратная функция. Построим графики функций (рис. 5) и убедимся, что они симметричны относительно прямой *y=x*.



Рис. 5

**Пример 4.** Найдите множество значений каждой из взаимно обратных функций $f\left(x\right), g(x)$, если известно, что $D\left(f\right)=\left(0;+\infty \right), D\left(g\right)=\left(-\infty ;\left.-1\right]\right.$.

*Решение.* Согласно свойству 1 взаимно обратных функций, имеем $E\left(g\right)=\left(0;+\infty \right), E\left(f\right)=\left(-\infty ;\left.-1\right]\right.$.

 5*.* Подведение итогов

 Проведение диагностической работы. Целью этой работы является определение уровня усвоения учебного материала, рассмотренного на лекции. Учащимся предлагается ответить на вопросы, сформулированные в начале лекции.

6*.* Постановка домашнего задания.

1. Разобраться с материалом лекции, выучить основные определения и формулировки теорем. Ответить на вопросы

2. Доказать свойства взаимно обратных функции.