25 октября 1 курс юристы

***Лекция по теме «Признак перпендикулярности прямой и плоскости»***

|  |  |
| --- | --- |
| На разработку конструкции прибора инженер тратить достаточно много времени. Изменяя и модифицируя конструкцию прибора. Почему, например, бытовой вентилятор имеет именно такую форму? Конструкция должна быть, такой что бы вентилятор не падал и прочно стоял перпендикулярно полу при работе. Конструкцию этого бытового прибора можно перенести на чертёж.Пол мы заменим на плоскость α, штангу вентилятора изобразим в виде прямой а, ножки крепления в виде прямых b и с. | На экране изображениеОписание: http://nskazka.ru/images/38f54f202967291de7e9f6d8c4adc405.jpgНа экране появляется элементы чертежа, заменяющие части изображения |
| Предположим, что если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости. Докажем предположение. Рассмотрим нашу прямую *а*, которая будет перпендикулярна пересекающимся прямым b и с, лежащим в плоскости α. Обозначим точку пересечения прямых-точкой М.Докажем, что прямая *а* перпендикулярна плоскости *α*.Так как мы знаем, что прямая перпендикулярна плоскости, если перпендикулярна любой прямой лежащей в этой плоскости, то нам нужно доказать перпендикулярность прямой *а* произвольной прямой *х.*Для доказательства построим дополнительно прямую у, параллельную прямой *х* и проходящую через точку М. Дополнительно на прямой *а* отметим точки М1 и М2 так, чтобы точка М была серединой отрезка М1М2.Так же проведём прямую в плоскости *,* пересекающую прямые *b*, *с, у* в точках В,С,Y соответственно.Соединим полученные точки с концами отрезка М1М2. Так как прямые b и с перпендикулярны к прямой *а* и проходят через середину отрезка М1М2, то их можно назвать серединными перпендикулярами к отрезку М1М2. Тогда точки В и С равноудалены от концов отрезка, то есть отрезок М1В равен отрезку ВМ2, а отрезок М1С равен отрезку СМ2.Треугольник ВМ1М равен треугольнику ВМ2М по трём сторонам. Из равенства треугольников следует, что угол М1ВY равен углу.Тогда треугольники М1ВY равен треугольнику М2ВY по двум сторонам и углу между ними. Из равенства этих треугольников следует равенство отрезков М1Y и M2Y. Это означает что треугольник М1YМ2 равнобедренный с основанием М1М2 и отрезок YМ его медиана, а по свойству медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию треугольника, отрезок YМ является высотой, значит прямые *у* и *а*, содержащие эти отрезки, можно считать перпендикулярными. Прямая *у* перпендикулярна прямой *а*, и параллельна прямой *х*. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой следует, что прямая *х* также перпендикулярна прямой *а*.Итак, прямая а перпендикулярна любой прямой х, значит перпендикулярна плоскости α. | На экране изображение и текст

|  |  |
| --- | --- |
|  | Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости. |

На экране чертёж и текст справа

|  |  |
| --- | --- |
|  | Дано: α, b∈α , с∈ α , b$∩$ с=М, *а*⊥b, *а*⊥с.Доказать: *а*⊥ α |

На экране обновляется чертёж и добавляется текст в доказательство:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Доказательство:1. Проведём прямую х: х∈ α.
 |

Обновляется чертёж и добавляется текст в доказательство

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. Проведём прямую у: у∥*х,*

у∈ α, уМ$\ni М$. |

Обновляется чертёж и добавляется пункт доказательства:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3) Отметим точки М1 и М2: М1М2∈ *а,* М1М=ММ2 |

Обновляется чертёж и добавляется пункт доказательства:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. Проведём прямую ВС: ВС∈ *,* ВС$∩с=С, $ВС$∩$b=В, ВС$∩$у=Y
 |

На экране обновляется чертёж и добавляется

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1. $\left\{\begin{array}{c}b⊥М\_{1}М\_{2} \\b\ni М\end{array}\right.⇒b-серед-ый перпедикуляр$ значит М1В=ВМ2

$\left\{\begin{array}{c}с⊥М\_{1}М\_{2} \\с\ni М\end{array}\right.⇒с-серед-ый перпедикуляр$ значит М1С=СМ2 |

Доказательство добавляется текстом1. ВМ1М= ВМ2М: ВМ1=ВМ2,СМ1=СМ2,ВМ–общая. Значит М1ВY= М2ВY.

Доказательство добавляется текстом1. Δ М1ВY= Δ М2ВY: BY–общая, ВМ1=ВМ2,  М1ВY=М2ВY. Значит M1Y=YM2.

Доказательство добавляется текстом1. так как M1Y=YM2, то Δ М1YМ2–равнобедренный, а по свойству YМ –высота.
2. Так как YМ $⊥$М1М2, то y$⊥a$.

Доказательство добавляется текстом последовательно.9)$\left\{\begin{array}{c}y⊥a\\y∥x\end{array}⇒xa\right.⇒a⊥α.$  |
| Но в этой теореме возможен ещё один случай расположения прямой *а*, который не демонстрирует наша конфигурация чертежа. Когда прямая *а* не проходит через точку пересечения прямых *b* и *с*.Докажем и этот вариант. В этом случае проведём прямую *а*1, параллельную прямой *а* и проходящуючерез точку М. Важно вспомнить теорему изученную на предыдущем уроке: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.Так как прямая *а* перпендикулярна прямым *b* и *с* и параллельна прямой *а1*, то по лемме прямая *а1* тоже будет перпендикулярна прямым *b* и *с*. В этом расположении прямых мы уже доказали перпендикулярность прямой к плоскости. Но тогда если прямая *а*1 перпендикулярна плоскости и параллельна прямой *а*, то по теореме 1 прямая *а* перпендикулярна плоскости α. | На экране чертёжНа экране обновляется чертёж и добавляется пункт доказательства

|  |  |
| --- | --- |
|  | Доказательство:1. Проведём *а*1: *а*1∥*а, а*1$\ni М.$
 |

На экране под чертежом появляется текст:На экране к лемме добавляется текст теоремы.Теорема 1: если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.К доказательству добавляется текст:1. $\left\{\begin{array}{c}a⊥b\\a⊥c\\a∥a\_{1}\end{array}⇒a\_{1}⊥b, \right.a\_{1}⊥с⇒a\_{1}⊥α$

К доказательству добавляется текст:1. $\left\{\begin{array}{c}a\_{1}⊥α\\a\_{1}∥a\end{array} ⇒\right.a⊥α$.
 |
| Эта теорема даёт возможность доказать перпендикулярность прямой плоскости с указанием перпендикулярности только двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости, а не любой прямой. В геометрии данное утверждение называется признаком перпендикулярности прямой и плоскости. | На экране текст признака и чертёж:Признак перпендикулярности прямой и плоскости: *если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости*. |
| Рассмотрим применение признака перпендикулярности прямой и плоскости.Дан треугольник АВС с суммой углов А и В в 90 градусов. Прямая ВD проведена перпендикулярно к плоскости треугольника АВС.Прямая СD лежит в плоскости треугольника ВСD. Треугольник АВС прямоугольный, так как угол АСВ равен разности 180 градусов и суммы углов А и В. Значит прямая АС перпендикулярна прямой ВС.По условию прямая BD перпендикулярна плоскости АВС, значит она перпендикулярна прямой АС.Тогда прямая АС перпендикулярна двум пересекающимся прямым ВС и ВD лежащим в плоскости треугольника ВСD, значит АС перпендикулярна к плоскости ВСD и перпендикулярна прямой СD лежащей в этой плоскости. | На экране текст задачи 1.В треугольнике АВС сумма углов А и В равна 90°. Прямая ВD перпендикулярна к плоскости АВС. Докажите, что СD$⊥АС.$К тексту добавляется чертёж и решение

|  |  |
| --- | --- |
|  | Решение: |

На экране обновляется чертёж.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Решение: |

В поле решение добавляется текст1) АВС –прямоугольный, т.к. АСВ=180°–(А+В)=90°АСВС В поле решение добавляется текст и обозначение прямого угла2)АС$⊥$ВD (по условию)В поле решение добавляется текст и обозначение прямого угла АСD3)$\left\{\begin{array}{c}АС⊥ВD \\АС⊥ВС \\ВD∩ВС=В \\ВD,ВС\in (ВСD)\end{array}\right.⇒АС⊥(ВСD)$4)$\left\{\begin{array}{c}АС⊥(ВСD)\\СD\in (ВСD)\end{array}\right.⇒АС⊥СD.$ |
|  Рассмотри ещё пример решения задачи.Даны два квадрата АВСD и АВEF.Они расположены так, что бы сторона AD$ была перпендикулярна стороне $AF.Так как АВEF- квадрат, то прямая AВ перпендикулярна стороне AF. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости АF плоскости квадрата АВСD и прямой ВС лежащей в этой плоскости.По определению квадрата АВСD сторона ВС перпендикулярна прямой АВ, но прямая АВ параллельна прямой FЕ плоскости АВEF, следовательно по лемме о параллельных прямых перпендикулярных к третьей прямой, прямая FE перпендикулярна прямой ВС.Таким образом, прямая ВС перпендикулярна пересекающимся прямым АF и FE лежащим в плоскости AEF, что следовательно по признаку перпендикулярности прямой к плоскости, значит прямая ВС перпендикулярна к плоскости AEF. | На экране текст задачи 2.Задача 2. Квадраты АВСD и АВEF расположены так, что AD$⊥$AF. Докажите, что прямая ВС перпендикулярна к плоскости AEF.На экране чертёж и текст.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Доказательство: |

К чертежу добавляется пункт решения.1. АВEF -квадрат$⇒AВ$AF

К чертежу добавляется пункт решения 2)1. $\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{c}AF⊥AВ \\AF⊥AD \left(по условию\right)\end{array}\\AВ, AD\in \left(АВСD\right)\\AВ∩AD=А\end{array}\right.⇒AF⊥\left(АВСD\right)$

К чертежу добавляется пункт решения 3)1. $\left\{\begin{array}{c}ВС⊥АВ\\АВ∥FE\end{array}\right.⇒FE⊥ВС$

К чертежу добавляется пункт решения 4)1. $\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{c}BC⊥AF \\BC⊥FE\end{array}\\AF, FE\in (AEF)\\AF∩FE=F\end{array}\right.⇒BC⊥\left(АEF\right)$
 |
| В дальнейшем с помощью данного признака будут доказаны несколько главных теорем о перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве. |  |

*Записать определения в тетрадь*

*Подготовить ответы на следующие вопросы:*

1. Верно ли что: если 2 прямые в пространстве перпендикулярны к третьей прямой, то это утверждение при условии, что все три прямые параллельны? Верно ли это утверждение при условии, что все три прямые лежат в одной плоскости?
2. Прямая а || , а b

. 3 Существует ли прямая перпендикулярная к прямым а и b?

**Файл с заданием отправьте преподавателю на почту mariaeva.vera@yandex.ru**