**0611. Выписать основные определения и решить по одной задаче.**

**1. Окружность и ее уравнение**

**Кривая второго порядка –**линия на плоскости, задаваемая уравнением: *Ах2+2Вху+Су2+2Dx+2Ey+F=0*, где коэффициенты *А, В, С, D, E, F* – любые действительные числа при условии, что *А, В, С*одновременно не равны нулю.

Выделяют следующие кривые второго порядка:

* + окружность;
	+ эллипс;
	+ гипербола;
	+ парабола.

**Окружностью** называется множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром.

Пусть центром окружности является точка *О*(*a;b*), а расстояние до любой точки *М*(*x;y*) окружности равно *R*(рис.1). Составим уравнение окружности.

 Расстояние от точки *М* до центра окружности можно найти, пользуясь формулой расстояния между точками:

 $\left|\overbar{ОМ}|=\sqrt{(x\_{2}-x\_{1^{)^{2}}+}(y\_{2}-y\_{1^{)^{2}}}}\right|$

Подставив в это выражение координаты точек *М* и *О*,получим:$ ОМ=\sqrt{(x-a)^{2}+(y-b)^{2}}$

Поскольку расстояние *ОМ* равно радиусу *R*, следовательно, R=$\sqrt{(x-a)^{2}+(y-b)^{2}}$ .

Возведём обе части уравнения в квадрат:  $(x-a)^{2}+(y-b)^{2}=R^{2}$

Это уравнение называется ***каноническим уравнением окружности*** с центром *О*(*a*;*b*) и радиусом *R*.

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности имеет вид: *x*2 + *y*2= *R*2.

**Пример 1**Составьте уравнение окружности с центром *О*(3; -2) и радиусом *r* = 5.

Решение:Подставив *a*=3, *b*=-2 и *r*= 5 в каноническое уравнение окружности  , получим:  .

**Пример 2**Запишите уравнение окружности с центром в точке М(-3;1), которая проходит через точку К(-1;5)

Решение: $\overbar{ОМ}|=\sqrt{(x\_{2}-x\_{1^{)^{2}}+}(y\_{2}-y\_{1^{)^{2}}}}\rightarrow \sqrt{-1-(-3)^{2}+(5-1)^{2}} =\sqrt{20}$

Подставим значения в уравнение окружности $(x-a)^{2}+(y-b)^{2}=R^{2}\rightarrow $

$$20=(x-(-3)^{2}+(y-1)^{2}$$

$$20=(x+3)^{2}+(y-1)^{2}$$

**Самостоятельно:**

1. **Составьте уравнение окружности**

А.О(-2;1) R=4Б. *М ( 1; -4) , R = 2; В. М ( 0; -5) , R = 3;*Г. О(-3;2), *R*=4.

1. **Составьте уравнение окружности с центром в точке М (1; -4), проходящей через точку А(0; 3).**
2. **Определите по уравнению окружности координаты ее центра и радиус :**

А) (Х+2)² + ( У – 5)² = 49 Б) (Х+7)² + ( У + 1)² = 36

В) (Х- 6)² + ( У + 15)² = 81 Г) Х ² + ( У -9)² = 2

1. **Эллипс и его уравнение**

***Эллипсом*** называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых *фокусами*) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

*Фокусы эллипса* принято обозначат буквами *F1 и F2*, расстояние между фокусами – через *2с*, сумму расстояний от любой точки эллипса до фокусов- через *2а (2а*$>2с$*).*

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$$

Где *a,b,c* – связаннымежду собой равенством $a^{2}-b^{2}=c^{2} $или$ b^{2}-a=c^{2}$**.**

Рассмотрим два основных случая расположения эллипса относительно осей координат. Эти случаи представлены в следующей таблице:



Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большей оси. Эксцентриситет обозначается буквой $ε$.

$ε=\frac{2с}{2а}=\frac{с}{а}$ или $ε=\frac{2с}{2b}=\frac{с}{b}$

Так как по определению *2a*$>2с$*, то*эксцентриситет всегда выражается правильной дробью, те 0$\leq ε\leq 1.$

* Если $ε≈1$ то эллипс сильно вытянут;
* если же $ε≈0, $ то эллипс имеет более круглую форму.
* если $ε=0$ то эллипс вырождается в окружность.

**№1Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением** $2x^{2}+y^{2}=32$

* Решение: $приведем уравнение к каноническому виду \frac{2x^{2}}{32}+\frac{y^{2}}{32}=\frac{32}{32}$

$$\frac{x^{2}}{16}+\frac{y^{2}}{32}=1$$

* Находим фокусы эллипса: а2=16 b2=32

Откуда а=4;b=$\sqrt{32}$или 4$\sqrt{2}$.

Так как b$>a$, то фокусы эллипса расположены на оси ординат

$$b^{2}-a^{2}=c^{2}$$

$$32-16=c^{2}$$

16=$c^{2}$

c=$\pm $4

F1(0;4)F1(0;-4)

* Находим длины осей:

2b=2\*4$\sqrt{2}$=8$\sqrt{2}$.

2a=2\*4=8.

* Эксцентриситет эллипса:

$$ε=\frac{2с}{2b}=\frac{2\*4}{8\sqrt{2}}=0,705.$$

$Ответ: $**фокусы эллипса F1(0;4) F2(0;-4)**

**длины осей: 2b=8**$\sqrt{2}$**. 2a=8**

$$ε=0,705$$

Самостоятельно:

Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением:

1. $16x^{2}+25y^{2}=400$
2. $\frac{x^{2}}{100}+\frac{y^{2}}{36}=1$
3. $\frac{x^{2}}{169}+\frac{y^{2}}{144}=1$
4. **Гипербола и ее уравнение**

**Гиперболой** называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Эта постоянная величина положительна и меньше расстояния меду фокусами.

 Фокусы гиперболы принято обозначат буквами *F1 и F2*, расстояние между фокусами – через *2с*, постоянную разность между расстояниями от любой точки гиперболы до ее фокусов - через *2а (2а*$>2с$*).*

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1 $ или $\frac{y^{2}}{b^{2}}-\frac{x^{2}}{a^{2}}=1$

Где *a,b,c* – связанны между собой равенством $a^{2}+b^{2}=c^{2}$.

Рассмотрим два основных случая расположения гиперболы относительно осей координат. Эти случаи представлены в следующей таблице:



**Эксцентриситетом** гиперболы называется отношение расстояние между фокусами к длине действительной оси.

$$ε=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a} ε=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}$$

Так как по определению2а$>2с, то ε гиперболы всегда выражается дробью, т.е. ε>1$

Прямые называются **асимптотами**; их уравнения имеет вид

$y=\pm \frac{b}{a}$**\*x**

**№1** Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот, если гипербола задана уравнением $16x^{2}-25y^{2}=400$

**Решение:**

* Приведем уравнение к каноническому виду, т.е. разделим обе его части на 400

$$\frac{16x^{2}}{400}-\frac{25y^{2}}{400}=1$$

$$\frac{x^{2}}{25}-\frac{y^{2}}{16}=1$$

$$a^{2}=25b^{2}=16$$

$$a=5 b=4$$

* Найдем с: **с=a2-b2=c2**

$$25+16=41$$

$$c=\sqrt{41}$$

Итак.фокусы гиперболы **F1(-**$\sqrt{41;} 0$**) F2(0;**$-\sqrt{41}$**)**

* $действительная ось 2a=5\*2=10$
* $мнимая ось 2b=4\*2=8$
* $ε=\frac{2c}{2a}=\frac{2\*\sqrt{41}}{10}$

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5}$$

* $уравнение ассимптот$

$y=\pm \frac{b}{a}$**\*x**

$y=\pm \frac{4}{5}$**\*x**

*Ответ: фокусы гиперболыF1****(-***$\sqrt{41;} 0$***) F2(0;***$-\sqrt{41}$***)***

*Длины осей 2а=10 2b=8*

*Эксцентриситет* $ε=\frac{2c}{2a}=\frac{2\*\sqrt{41}}{10}$

$уравнение ассимптотy=\pm \frac{b}{a}$***\*x***

**Самостоятельно**: Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот, если гипербола задана уравнением $5x^{2}-4y^{2}=20$**.**

1. **Парабола и ее уравнение**

**Параболой** называется множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (*называемой фокусом*) и данной прямой (*называемой директрисой*).

Фокус параболы принято обозначать буквой *F* , директрису буквой *d*, расстояние от фокуса до директрисы - буквой *p(p*$>0$*).* Рассмотрим основные случаи расположения параболы относительно осей координат.

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс (рис.61,62), имеет вид

$$y^{2}=2px или y^{2}=-2px$$

Эти два случая представлены в следующей таблице:



Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат (рис.63,64), имеет вид

$$x^{2}=2py или x^{2}=-2py$$

Эти два случая представлены в следующей таблице:


**№1** Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^{2}=8x.$

Решение:

**№2** Найти каноническое уравнение параболы и уравнение ее директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты (0;-3).

Решение:

1. Фокус параболы отрицателен, т.к. его координаты (0;-3) следовательно, уравнение параболы имеет вид $x^{2}=-2py$(ветви параболы направлены вниз**).**
2. Составляем уравнение параболы:

$$y=\frac{p}{2}=-3$$

$$p=-6$$

$$2p=-12$$

$$x^{2}=12py-уравнение параболы $$

1. Уравнение директрисы:

$$y=3$$

$$y-3=0$$