24 февраля. Добрый день, уважаемые студенты! Выполняем задания и присылаем на электронную почту.

**Файл с заданием отправьте преподавателю на почту mariaeva.vera@yandex.ru**

 «Теорема Эйлера»

Эта теорема связывает вмес­те число вершин, ребер и граней выпуклого многогран­ника. Она положила начало одному из наиболее интен­сивно развивающихся в настоящее время направлений гео­метрии — топологии.

**Новый материал**

Учащимся предлагается заполнить таблицу, по­ставив в нее числа, соответствующие количеству вер­шин (В), ребер (Р) и граней (Г) указанных много­гранников.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название многогранника | В | Р | Г |
| Треугольная пирамида |  |  |  |
| Четырехугольная пирамида |  |  |  |
| Треугольная призма |  |  |  |
| Четырехугольная призма |  |  |  |
| n-угольная пирамида |  |  |  |
| n-угольная призма |  |  |  |

Вопрос. Какая зависимость имеется между чис­лом вершин, ребер и граней этих многогранников?

Ответ. Для всех выбранных многогранников имеет место равенство В - Р + Г = 2.

Оказывается, что данное равенство справедливо не только для указанных многогранников, но и для про­извольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогран­ника имеет место равенство

В - Р + Г = 2, (\*)

где В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней данного многогранника.

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой топологии — раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополни­тельных склеек. Такие свойства называются тополо­гическими. Соотношение Эйлера В - Р + Г = 2 для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, однако их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются. При этом много­гранник может стать невыпуклым, тем не менее для него будет выполняться соотношение Эйлера. Однако есть невыпуклые многогранники, для которых соот­ношение Эйлера не выполняется. Пример такого мно­гогранника приведен на рисунке 1. Он получается, если в кубе вырезать дыру в форме параллелепипеда.



Учащимся предлагается самостоятельно найти число вершин, ребер и граней этого многогранника.

В результате получаем:

В = 16, Р = 32, Г = 16, В - Р + Г = 0.

Оказывается, что для выполнимости соотношения Эйлера существенным является не столько выпуклость многогранника, сколько то, что у него нет дыр. По­верхность выпуклого многогранника непрерывной деформацией можно сделать такой же, как у шара, а с поверхностью многогранника, изображенного на рисунке 1, этого сделать нельзя.

Доказательство (теоремы Эйлера). Представим по­верхность данного многогранника сделанной из элас­тичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плос­кости.

Это можно сделать, например, с помощью цент­рального проектирования с центром в точке S, распо­ложенной немного выше удаленной грани ABCDE (рис. 2).



В результате на плоскости получим сетку (рис. 3), состоящую из Г' = Г - 1 многоугольников (которые по-прежнему будем называть гранями), В вершин и Р ребер.



Рис.3

Для этой сетки нужно доказать равенство

В - Р + Г' = 1. (\*\*)

Тогда для многогранника будет справедливо тре­буемое равенство (\*).

Докажем, что соотношение (\*\*) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике сетки провести диа­гональ. Действительно, после проведения такой диа­гонали (например, EF) в сетке будет В вершин, Р + 1 ребер и Г' + 1 граней, следовательно,

В - (Р + 1) + (Г' + 1) = В - Р + Г'.

Пользуясь этим свойством, проведем в сетке диа­гонали, разбивающие входящие в нее мно­гоугольники на треугольники, и для полученной треугольной сетки (рис. 4) покажем выполнимость соотношения (\*\*).



Для этого будем последовательно убирать край­ние треугольники. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника требуется снять одно ребро (на рис. 4 для удаления треугольника ABF тре­буется снять ребро АВ);

б) для удаления треугольника требуется снять два ребра (на рис. 5 для удаления треугольника BCF тре­буется снять ребра ВС и BF).



В обоих случаях соотношение (\*\*) не изменится. Например, в первом случае после удаления треуголь­ника сетка будет состоять из В вершин, Р - 1 ребер и Г' - 1 граней, В - (Р - 1) + (Г' - 1) = В - Р + Г'.

Самостоятельно рассмотрите второй случай (рис. 6).



Таким образом, удаление одного треугольника не меняет соотношения (\*\*). Продолжая этот процесс уда­ления треугольников, в конце концов мы придем к сетке, состоящей из одного треугольника. Для такой сетки В = 3, Р = 3, Г' = 1, следовательно,

В - Р + Г = 1.

Значит, соотношение (\*\*) имеет место и для исход­ной сетки, откуда окончательно получаем, что для данного многогранника справедливо соотношение (\*).

**Решение задач**

Задача 1. Гранями выпуклого многогранника яв­ляются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет 12 ребер? Нарисуйте такой многогранник.

Решение. Пусть у данного многогранника будет В вершин, Р ребер и Г граней. Тогда ЗГ = 2Р, где Р = 12, значит, Г = 8. Применяем теорему Эйлера, из которой следует, что В = 2 + Р - Г. В нашем случае В = 2 +12-8 = 6. Итак, В = 6, Р = 12, Г = 8. Приме­ром такого многогранника является октаэдр (рис. 7).



Задача 2. Из каждой вершины выпуклого много­гранника выходит три ребра. Сколько он имеет вер­шин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

Решение. ЗВ = 2Р, учитывая, что Р = 12, имеем: В = 8. По теореме Эйлера

Г=2-В + Р, Г = 2- 8 + 12 = 6.

Таким образом, у данного выпуклого многогран­ника В = 8, Р=12иГ = 6. Примером такого много­гранника является куб.

Задача 3\*. Докажите, что в любом выпуклом мно­гограннике число треугольных граней плюс число трехгранных углов больше или равно восьми.

Решение. Обозначим через Гn число граней с п реб­рами. Тогда Г = Г3 + $Г\_{4}$ +$Г\_{5}$+$Г\_{6}$+ ... Каждая тре­угольная грань имеет три ребра, и число треуголь­ных граней равно Г3. Поэтому общее число ребер в треугольных гранях равно З$Г\_{3}$ Аналогично, общее чис­ло ребер в четырехугольных гранях равно 4$Г\_{4}$, и т.д.

Поскольку каждое ребро многогранника содержит­ся ровно в двух гранях, то при таком подсчете ребер мы каждое ребро посчитаем дважды, следовательно, будет иметь место равенство

2Р = ЗГ3+$4Г\_{4}$+$5Г\_{5}$+$6Г\_{6}$+… .

Аналогичным образом обозначим через В число вершин, в которых сходится п ребер.

Тогда В = В3 + $В\_{4}$ + $В\_{5}$ + В6 + ...

Значит, для числа ребер (Р) будет иметь место ра­венство

2Р = $3В\_{3}$+$4В\_{4}$+$5В\_{5}$+$6В\_{6}$+…

Воспользуемся равенством 4В - 4Р + 4Г = 8, полу­чающимся умножением обеих частей равенства Эй­лера на 4.

Имеем

4В = $4В\_{3}$+$4В\_{4}$+$4В\_{5}$+$4В\_{6}$+…

4Г = 4 $Г\_{3}$+ 4$Г\_{4}$ + 4$Г\_{5}$+$4Г\_{6}$+…

4Р = 2Р + 2Р = З$В\_{3}$+ 4$В\_{4}$, + 5$В\_{5}$ +

+$6В\_{6}$+…+$3Г\_{3}$+$4Г\_{4}$+$5Г\_{5}$+$6Г\_{6}$+…

Подставляя эти выражения в указанное равенство, получим:

В3 + Г3-(В5 + 2В6+... + Г5 + 2Г6 +...) = 8.

Из этого следует, что В3+Г3 ≥ 8, что и требова­лось доказать.

В качестве приложения теоремы Эйлера рассмот­рим задачу Эйлера о трех домиках и трех колодцах.

Задача 4. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Решение. Попробуем провести требуемые дорожки. На рисунке 8 показано расположение дорожек, две из которых пересекаются. Попытки провести непересе­кающиеся дорожки к успеху не приводят. Однако это не означает, что этого нельзя сделать. То, что не полу­чается у нас, может получиться у кого-нибудь друго­го. Если же мы предполагаем, что непересекающиеся дорожки провести нельзя, то это нужно доказать. До­казательство будем вести от противного. Предположим, что это можно сделать. Каждую точку-домик соеди­ним с каждой точкой-колодцем. Получим девять ре­бер, которые попарно не пересекаются.



Рис.8

Эти ребра образуют на плоскости сетку, аналогич­ную той, которая была получена при доказательстве теоремы Эйлера. Поэтому для числа вершин, ребер и граней этой сетки должно выполняться соотношение Эйлера В – Р+Г' — 1. Добавим к ней еще одну грань — внешнюю часть плоскости по отношению к исходно­му многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера при­мет вид В - Р + Г = 2, причем В = 6 и Р = 9. Следова­тельно, Г должно равняться пяти.

Заметим, что поскольку дорожки не соединяют меж­ду собой никакие два домика и никакие два колодца, то у рассматриваемой сетки нет треугольных граней. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество ребер должно быть не меньше $\frac{5\*4 }{2}$=10, что противоречит тому, что их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в зада­че отрицателен — нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

**Задание на дом**

1. Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.
2. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте та­кой многогранник.