**Степень с рациональным и действительным показателями**

*Мы уже знакомы со степенями с натуральным показателем. Это числа вида: 23, 62 и т.д. А что такое степени с рациональным и действительным показателем? Что у них общего и в чем их отличие от степеней с натуральным показателем?*

## *Для начала повторим некоторые свойства степеней с натуральным показателем:*

* a0=1 30=0
* a1=а 31=1
* a-n = $(\frac{1}{a})^{n}$ 3-2 =$ \frac{1}{9}$

## *Степень с рациональным показателем.*

Вычислить $\sqrt[4]{5^{12}}$ .

Так как 512 = (53)4, то $\sqrt[4]{5^{12}}$ = $\sqrt[4]{\left(5^{3}\right)^{4}}$ = $5^{3}$= 125

Таким образом, можно записать $\sqrt[4]{5^{12}}$ = 125 = $5^{3}$

или $\sqrt[4]{5^{12}}$ = $5^{\frac{12}{4}}$.

Точно также можно записать, что $\sqrt[5]{7^{-15}}=7^{-\frac{15}{5}}$ .

Если n – натуральное число, n $\geq $2, m – целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при a$>$0 справедливо равенство

$\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$**. (1)**

* По условию $\frac{m}{n}=k$ - целое число, откуда m = nk.

Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем

$\sqrt[n]{a^{m}}=\sqrt[n]{a^{kn}}=\sqrt[n]{\left(a^{k}\right)^{n}}=a^{k}=a^{\frac{m}{n}}$.

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где a>0, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т.е. и в этом случае считают, что $a^{\frac{m}{n}}= \sqrt[n]{a^{m}}$.

Таким образом, формула (1) справедлива для любого целого числа *m* и любого натурального числа *n≥2* и *a>0*.

Например:
$16^{4}= \sqrt[4]{16^{3}}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^{3}=8$;

Напомним, что рационально число *r* – это число вида $\frac{m}{n}$, где *m* – целое, *n* – натуральное число.

Тогда по формуле (1) получаем $a^{r}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$.

Таким образом, степень определена для любого рационального показателя *r* и любого положительного основания *a*.

Если $r=\frac{m}{n}>0,$ то выражение $\sqrt[n]{a^{m}}$ имеет смысл не только при *a*>0, но и при *а* = 0, причём

 $\sqrt[n]{0^{m}}=0.$ Поэтому считают, что при *r* > 0 выполняется равенство $0^{r}=0.$

Пользуясь формулой (1), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Так как $\frac{m}{n}= \frac{mk}{nk}$, где *n* и *k* – натуральные числа, m – целое число, то при любом *a* > 0

$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mk}{nk}}.$ **(2)**

Например, $8^{\frac{5}{15}}=8^{\frac{1}{3}}=2$.

Можно показать, что все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

А именно для любых рациональных чисел *p* и *q* и любых *a* > 0 и *b* > 0 верны равенства:

1. ***apa q= ap+q.***
2. ***ap: aq= ap-q.***
3. ***(ap)q=ap\*q.***
4. ***(ab)p= apbp.***
5. $(\frac{a}{b})^{p}=\frac{a^{p}}{b^{p}}$**.**

1. ***Степень с действительным показателем.***

Покажем, как можно определить степень с иррациональным показателем, на примере $3^{\sqrt{2}}.$ Пусть r1,r2,r3,..., rn, … - последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ (например, с недостатком):

$$r\_{1}=1,4, r\_{2}=1,41,r\_{3}=1,414,… .$$

Эта последовательность стремится к числу $\sqrt{2}$, т.е. $\lim\_{n\to \infty }r\_{n}=\sqrt{2}.$

$3^{1,4}, 3^{1,41},3^{1,414}$**, … .**

Можно показать, что эта последовательность стремится к некоторому действительному числу, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$, т.е. $3^{\sqrt{2}}= \lim\_{n\to \infty }3^{r\_{n}}.$

Вообще, пусть $a>0$ и *x*– произвольное иррациональное число. Рассмотри последовательность *x1, x2, … , xn,* … десятичных приближений числа *x*. Эта последовательность имеет предел $\lim\_{n\to \infty }x\_{n}=x.$

Можно показать, что последовательность $a^{x\_{1}}, a^{x\_{2}}, a^{x\_{3}}, … , a^{x\_{n}}, … $также имеет предел. Этот предел обозначают $a^{x}$и называют степенью числа *a* с показателем *x*.Таким образом, степень $a^{x}$определена для любого $a>0$ и любого действительного показателя. При любом *xє***R** и любом *a* степень $a^{x}$ является положительным действительным числом:

$a^{x}>0$ при *x є***R,** $a>0$.

Если основание степени *a= 0*, то степень *0x*определяют только при *x>0* и считают, что *0x= 0* при *x>0*. Например, $0^{\sqrt{2}}=0, 0^{0,1}=0.$ При *x≤0* выражение *0x* не имеет смысла. Например, выражения 0-1,$0^{-\sqrt{2}}$ смысла не имеют.При таком определении степени с действительным показателем сохраняются все известные свойства степени с рациональным показателем. Доказательства этих свойств для степени с действительным показателем проводится в курсе высшей математики.

**7. Задания для самостоятельной работы с последующей проверкой.**

**Вычислить:**

**1)** **;**

**2) ;**

**3)** ;

**4)**;

**5)** ;

**Упростить:**

**6) **;

**7)** .

.